III-3-5. 重積分

頻度主義による統計では、何らかの数学モデルで確率を求めなければなりません。それらの数学的モデルはデータの特性や分析の目的に応じて、いくつかの確率モデルを組み合わせて作られます。二項分布を折り重ねて正規分分布を作り出す過程がその典型的な例です。これは式の変形と多次元平面で確率分布の計算によります。読者の多くは、この説明に言語矛盾を感じるでしょう。そもそも平面というのは２次元空間のことですから。これは比喩的な表現で、著者は n+1 次元の空間を考えていて、n+1 次元目に確率を配置し、それを説明する説明する n 次元空間を平面と表現したのです。n 次元空間の一点は$(x_1,\ x_2,\cdots x_n)$と表せるので、それらの値が得られる確率は$\mathrm{P}(x_1,\ x_2,\cdots x_n)$です。ちょうど、二次元平面上の地図に山の標高が等高線で描かれているイメージです。この地図から一定の区域の山のボリューム（体積）を求める計算が重積分です。数学的には次の書き方で表現できます。

$$\int\int\cdots\int_D P(x_1,x_2,\cdots x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n$$

D は積分範囲でn次元の広がりを持っています。

D は様々な形で与えられます。.

たとえば、次のように積分範囲が与えられれば

$\mathrm{D}=\{(x_1,x_2,\cdots x_n)|a\leq x_1\leq b,c\leq x_2\leq d,\ \ \cdots,y\leq x_n\leq z\}$

重積分を次のように書くことが出来ます。

$$\int_y^z\cdots\int_c^d\int_a^b P(x_1,x_2,\cdots x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n$$

しかし、次のように積分範囲が与えられた場合もあります。

$$\mathrm{D}=\{(x_1,x_2,\cdots x_n)|{x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2\leq r^2\}$$

これは、中心から一定の距離の範囲内という意味ですが、この場合には、各積分記号に範囲を書き込藻ことはできませんから、次のように書きます。

$$\int\int\cdots\int_D P(x_1,x_2,\cdots x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$\mathrm{D}=\{(x_1,x_2,\cdots x_n)|{x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2\leq r^2\}$$

最も簡単な計算例として

$$P(x_1,x_2,\cdots x_n)=1$$

を取り上げます、簡単に説明するために３次元にします

$$P(x,y,z)=1$$

この重積分は次のように書けます

$$I=\int\int\int_D dxdydz$$

$\mathrm{D}=\{(x,y,z)|a\leq x\leq b,c\leq y\leq d,\ \ e\leq z\leq f\}$の場合

$$I = \int_e^f \int_c^d \int_a^b dxdydz$$

$$\int_b^a dx = [x]_a^b = b - a$$

$$I = \int_e^f \int_c^d (b-a)dydz = (b-a)\int_e^f \int_c^d dydz$$

$$\int_c^d dy = [y]_c^d = d - c$$

$$I = (b-a)\int_e^f (d-c)dz = (b-a)(d-c)\int_e^f dz$$

$$\int_e^f dz = [z]_e^f = f - e$$

$$I = (b-a)(d-c)\int_e^f dz = (b-a)(d-c)(f-e)$$

$I = \int_e^f \int_c^d \int_a^b dxdydz$という積分の意味は、この範囲の中にある　$dxdydz$または$\Delta x\Delta y\Delta z$で表されるすべての立方体の体積の和の意味です。したがって、図 30 に示す箱型の体積になります。

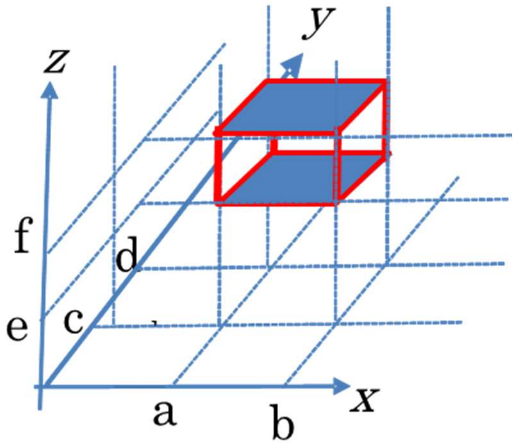

図 30. $\int_e^f \int_c^d \int_a^b dxdydz$の重積分

実際に多くの積分は、空間的な形を持っています。

たとえば、

$$\mathrm{P}(x,y) = \frac{1}{2}x^2 - xy - x + 2y,$$

であったとします。

これを、$|0 \le \mathrm{x} \le 2, 0 \le y \le \frac{1}{2}x$の範囲で積分するのは次の重積分で表せます。

$$\int\int_D \mathrm{P}(x,y)dxdy$$

$$\mathrm{P}(x,y)=\frac{1}{2}x^2-xy-x+2y$$

$$\mathrm{D}=\left\{(x,y)|0\le \mathrm{x}\le 2,0\le y\le \frac{1}{2}x\right\}$$

この積分は図 31 の太線に囲まれ場部分の体積です。

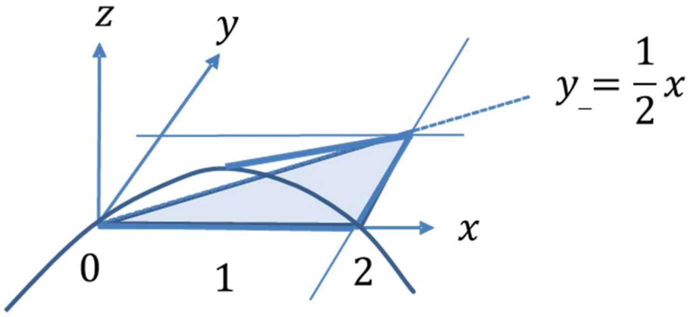

図 31. $\int\int_D \mathrm{P}(x,y)dxdy\ \mathrm{D}=\left\{(x,y)|0\le \mathrm{x}\le 2,0\le y\le \frac{1}{2}x\right\}$の重積分

これを実際に計算すると以下の様になります。

$$I=\int\int_D \left(\frac{1}{2}x^2-xy-x+2y\right)dydx$$

$$I=\int_0^2\int_0^{\frac{1}{2}x}\left(\frac{1}{2}x^2-xy-x+2y\right)dydx$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}x}\left(\frac{1}{2}x^2-xy-x+2y\right)dy=\left[\frac{1}{2}x^2y-\frac{1}{2}xy^2-xy+y^2\right]_0^{\frac{1}{2}x}=\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{8}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^2$$

$$=x^2\left(\frac{1}{8}x-\frac{1}{4}\right)$$

$$I=\int_0^2 x^2\left(\frac{1}{8}x-\frac{1}{4}\right)dx=\left[\frac{1}{2^5}x^4-\frac{1}{2^2\cdot 3}x^2\right]_0^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

この場合、最初の積分で y がなくなりますから、結局、単なる積分になります。しかし、いつでも単純な形になるわけではありません。しばしば、積分範囲が複雑な関数になっているからです。その場合、座標変換すると簡単に積分できる場合があります、その典型的な例が、球体の体積の求積法です。これについては、III-3-4 の座標変換で説明しました。

$$I=\int\int\int_D dxdydz$$

$$\mathrm{D}=\{(x,y.z)|x^2+y^2+z^2\le r^2\}$$

直交座標でこの計算をしようとすれば、下記の様に積分するしかありませんが、これはかなり大変です。

$$I=\int_{-\sqrt{r^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}\int_{-\sqrt{r^2-x^2-z^2}}^{\sqrt{r^2-x^2-z^2}}\int_{-\sqrt{r^2-y^2-z^2}}^{\sqrt{r^2-y^2-z^2}}dxdydz$$

簡単には単純な積分の形にはならないでしょう。これを極座標にすることによって、極めて分かりやすい単純な積分のなることは、III-3-4 で説明しました。座標変換は極座標変換に限りません。ポイントは、積分を繰り返して変数を一つにすることです。たとえば、III-2-5 のカイ二乗分布のところで、カイ二乗分布を作るときには、直交座標から角度を変えて別の直交座標に変換することで重積分をしています。