V-1-6. 固有値、固有ベクトル

固有値はいろいろなところに出てきます。問題を固有値の問題に還元して考えるということが多いので、理解しておくことが必要です。
だいぶ慣れてきたので、話はかなり簡単です。
V-1-3.逆行列と単位行列のところでやった、100m先の角を左に曲がって 200m 行った先の場所の話に戻ります。この時道が３０度歪んでいたので、頭の中で直行している地図を、実際の位置に合わせるための変形として、行列を左からかけるという話です。

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

というのがその時の変換に使った行列です。すでに使った図ですが、変換の内容を図 55 に変化時のベクトルの向きを示します。

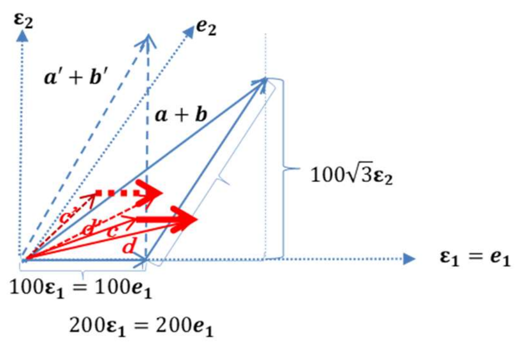


図 55.固有ベクトル

図 55 に示したように、座標軸の移動に伴って、ベクトル作る三角形は歪みましたが、赤い色で示した破線の太い矢印は、変換によって移動して赤い実線の矢印になります。移動して少し長さが変わったものの、矢印の方向は変わっていません。確認します。
破線の赤い矢印のベクトルを $\boldsymbol{d}' - \boldsymbol{c}'$ とします。

$$\boldsymbol{d}' = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{c}' = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{d}' - \boldsymbol{c}' = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これを行列によって変換します。

$$\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \boldsymbol{d}' = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 125 \\ 25\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \boldsymbol{c}' = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 \\ 25\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{d} - \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 125 \\ 25\sqrt{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 75 \\ 25\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 0 \end{pmatrix}$$

この場合は方向も長さも変わっていません。

このように行列を掛けることによって、移動したり大きくなったりしても、方向が変わらないベクトルをその行列の固有ベクトルと言います。また、どのくらい大きくなるかという比率を固有値と言います。この場合は固有値は 1 ということになります。

ベクトルの方向が変わらずに大きさだけが変わるということを式で表すと、

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ということです。λ は固有値です。行列式を連立方程式で書くと

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = \lambda x_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = \lambda x_2$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = \lambda x_2$$

なので、左辺に移行して行列式の形で書くと

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ということです。

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

式 57

を解けば固有値 λ が得られます。式 57 を固有方程式と言います。この式からも明らかなように n 次の行列には通常 n 個の固有値があります。もちろん重根があれば、その分重複ができますから、重根の数だけ固有値は少なくなります。固有値を大きな値から行列の対角因子に並べた行列を普通$\boldsymbol{\Lambda}$（ラムダ、A ではない)で表すことが習慣になっています。

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$$

以下の連立方程式を解けば、固有ベクトルが得られます。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

この方程式を実際に解いてみると、若干混乱します。連立方程式の解はスカラーで与えられます。一方、スカラーとベクトルの積はベクトルです。この連立方程式の解は、ベクトルの要素の関係式として表されます。実際の例で計算してみます。図に示した地図の例を使います。

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & \dfrac{1}{2} \\ 0 & \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \lambda\right) = 0$$

$$\lambda = 1, \qquad \lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

この場合はかなり特殊ですが、固有値$\lambda = 1$に属する固有ベクトルを求めます。

$$\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{2} \\ 0 & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$x_1 + \frac{1}{2} x_2 = x_1$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} x_2 = x_2$$

になって、

$$x_2 = 0$$

x_1は任意の値が取れます。

したがって　ベクトルとしては

$$t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

となります。これはx_1軸に平行なベクトルで、確かに、図 55 に示したベクトルと一致します。

もう一つの固有値 $\lambda=\frac{\sqrt{3}}{2}$に属する固有ベクトルを求めます。

$$\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

$$x_1+\frac{1}{2}x_2=\frac{\sqrt{3}}{2}x_2$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x_2=\frac{\sqrt{3}}{2}x_2$$

$$x_1=\frac{\sqrt{3}-1}{2}x_2$$

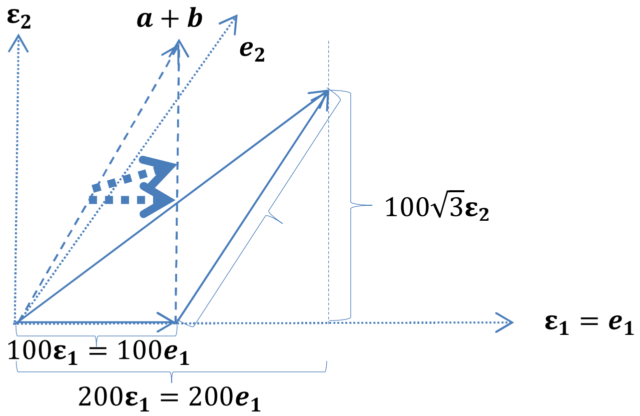
x_2が 1 の時にx_1が$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$となるという関係です。これを、次の行列で表します。

$$t\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}-1}{2}\\1\end{pmatrix}$$

t は任意の実数

が固有値$\frac{\sqrt{3}}{2}$に属する固有ベクトルです。

つまり、下図で示した２本の太い破線の矢印と並行する矢印はすべて、行列を掛けて変形しても、矢印の向きが変わらないのです。



ここに挙げた例はかなり特殊なので
もう少し一般的な例を上げます。

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

の固有値、固有ベクトルを求めます。

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (5-\lambda)(-2-\lambda) + 12$$

$$= \lambda^2 - 3\lambda - 10 + 12$$

$$= (\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda = 2 \ \text{ or } \ \lambda = 1$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

に、$\lambda = 2$ を代入

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$5x_1 - 6x_2 = 2x_1$$

$$2x_1 - 2x_2 = 2x_2$$

$$2x_2 = x_1$$

固有値$\lambda = 2$に属する固有ベクトルは

$$t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 1$を代入

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$5x_1 - 6x_2 = x_1$$

$$2x_1 - 2x_2 = x_2$$

$$2x_1 = 3x_2$$

固有値$\lambda = 1$に属する固有ベクトルは

$$t\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

となります。ここで見たように,固有値を求めるには

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

を解けばよいのです。これを一般化して書くと

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=0$$

$\boldsymbol{E}$は単位行列

と書けます。すでに述べたように、これを行列 A の固有方程式といいます。
これに対してλを t に変えたものを

$$|\boldsymbol{A}-t\boldsymbol{E}|$$

を固有多項式といいます。

$$\phi_A(t)=|\boldsymbol{A}-t\boldsymbol{E}|$$

と表すことが多いと思います。

$$\phi_A(t)=\phi_B(t)$$

という式の意味は、行列$\boldsymbol{A}$と行列$\boldsymbol{B}$のすべての固有値が一致しているということです。これを行列の相似と言います。